



- ۱) متوسط تشریحی ۱۳۹۷
دایره‌ای محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام بارم است؟
- ۲) متوسط تشریحی ۱۳۹۹
دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند؛ معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟
بارم: ۱
- ۳) متوسط نهایی ۱۴۰۲
جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
با توجه به مثبت بودن r ، معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه‌ی برقرار باشد.
بارم: ۱
- ۴) دشواری تشریحی ۱۳۹۵
دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ و $x^2 + y^2 + 2y + a = 0$ مماس خارج هستند. مختصات نقطه‌ی تماس بارم: ۱ کدام است؟
- ۵) ساده تشریحی ۱۳۹۸
معادله دایره‌ای که دو نقطه $(2, 1)$ و $(0, 3)$ دو سر قطری از آن هستند، کدام است؟
بارم: ۱
- ۶) متوسط تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸
معادله‌ی یک دایره به صورت $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ است.
الف) مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.
ب) وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $C(O, r)$ مشخص کنید.
پ) اگر یک دایره به مرکز $O'(-1, -1)$ بر این دایره مماس خارج باشد، طول شعاع آن r' را به دست آورید.
بارم: ۳
- ۷) دشواری تشریحی ۱۴۰۰
خط $x + y + 1 = 0$ دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و شعاع $\sqrt{10}$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB کدام است؟
بارم: ۱
- ۸) متوسط نهایی ۱۴۰۲
وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ و $x^2 + y^2 + 2y = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.
بارم: ۱
- ۹) متوسط تشریحی ۱۴۰۰
اگر نقطه $A(m, 2m+1)$ داخل دایره $x^2 + y^2 - 2x + y - 8/4 = 0$ باشد، آن‌گاه m چند مقدار صحیح را اختیار می‌کند؟
بارم: ۱
- ۱۰) متوسط نهایی ۱۴۰۲
دو دایره‌ی زیر نسبت به هم چه وضعی دارند؟
بارم: ۱
 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9, x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$

۱۱

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

معادله دایره‌ای که مرکز آن روی محور x ‌ها بوده و بر دو خط $y = -x$ و $y = 3\sqrt{2} - x$ مماس باشد، کدام است؟

بارم: ۱

۱۲

نهایی ۱۴۰۰

ساده

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

بارم: ۱

الف) بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.

ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.

۱۳

نهایی ۱۴۰۲

ساده

$A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دو سر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

بارم: ۱

۱۴

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

شعاع دایره گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(-3, 0)$ و مبدأ مختصات کدام است؟

بارم: ۱

۱۵

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

معادله دایره‌ای که نقاط $A(1, 3)$ و $B(-5, 1)$ دو سر یک قطر آن هستند، کدام است؟

بارم: ۱

۱۶

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

مرکز دایره‌ای روی نیمساز ربع دوم است. این دایره محور y ‌ها را در نقاطی با عرض ۱ و ۵ قطع می‌کند. طول قطر آن چه قدر است؟

بارم: ۱

۱۷

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

طول قطر دایره‌ای به مرکز $O(-2, 2)$ که با دایره $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 8$ مماس خارج باشد، کدام است؟

بارم: ۱

۱۸

نهایی ۱۳۹۹

دشوار

معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y = 1$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.

بارم: ۱

۱۹

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

اگر $A(m-2, 0)$ ، $B(m, 2m)$ و فاصله C نقطه C وسط AB از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد. مقادیر m کدام است؟

بارم: ۱

۲۰

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مرکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد کدام است؟

بارم: ۱

۲۱

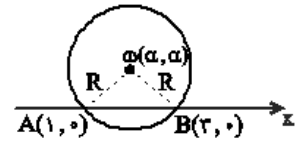
نهایی ۱۴۰۲

متوسط

اگر $F(-1, 1)$ و $F'(-3, 1)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بیابید.

بارم: ۱

از آنجا که مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (یعنی خط $y = x$) قرار دارد، می‌توانیم آن را به صورت $\omega(\alpha, \alpha)$ در نظر بگیریم.



از طرفی این دایره، محور x ها را با طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده است، یعنی دو نقطه‌ی $A(1, 0)$ و $B(3, 0)$ روی این دایره واقع‌اند.

بنابراین $R = Aw = Bw$

$$Aw = Bw \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)^2 + \alpha^2 = (\alpha-3)^2 + \alpha^2 \Rightarrow (\alpha-1)^2 = (\alpha-3)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Rightarrow R = Aw = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

معادله وتر مشترک دو دایره، از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 - y^2 - 2y = -3 \\ x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

$$2x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y = x$$

معادله وتر مشترک دو دایره برابر $y = x$ است.

$$a^2 + b^2 - 4x > 0$$

نقطه‌ی تماس روی خط‌المركزین دو دایره قرار دارد. داریم:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$$

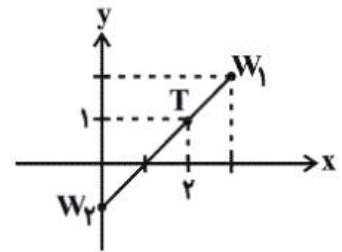
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز : } W_1 = (3, 2) \\ \text{شعاع : } R_1 = \frac{1}{\sqrt{36 + 16 - 44}} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{دایره ی دوم : } x^2 + y^2 + 2y + a = 0 \Rightarrow \text{مرکز : } W_2 = (0, -1)$$

طبق فرض، این دو دایره مماس خارج‌اند، پس: $W_1 W_2 = R_1 + R_2$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2} + R_2 \Rightarrow R_2 = 2\sqrt{2}$$

مطابق شکل، نقطه‌ی تماس روی پاره‌خط $W_1 W_2$ و به نسبت $\frac{TW_2}{TW_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ قرار دارد. همان‌طور که می‌بینید مختصات این نقطه عبارتست از: $T = (2, 1)$.



توجه: نیازی به محاسبه‌ی a نیست، چون که در این سؤال، مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره به‌صورت مستقل به‌دست می‌آید.

از آنجا که $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ دو سر قطر این دایره هستند، مرکز این دایره وسط پاره‌خط AB و شعاع آن نصف طول AB است، پس:

$$\omega\left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, 1)$$

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره : } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = -3$$

(الف)

$$O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) \Rightarrow O(r, r)$$

$$r = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - fc} = \frac{1}{r} \sqrt{16 + 36 - 48} = 1$$

(ب)

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|r + r - r|}{\sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$\begin{matrix} \sqrt{r} > 1 \\ \longrightarrow \end{matrix} d > r$$

خط دایره را قطع نمی کند

(پ)

$$r + r' = OO', \quad OO' = \sqrt{(-r)^2 + (-r)^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$r' = OO' - r = \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

معادله دایره‌ای به مرکز $(r, -1)$ و شعاع $\sqrt{10}$ به صورت زیر است:

$$(x - r)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

برای یافتن نقاط تلاقی این دایره با خط $x + y + 1 = 0$ کافی است $y = -x - 1$ را در معادله دایره جایگذاری کنیم:

$$(x - r)^2 + (-x)^2 = 10 \Rightarrow x^2 - 2rx + r^2 + x^2 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 - 2rx - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \rightarrow A(-1, 0) \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \rightarrow B(3, -4) \end{cases}$$

پس مختصات نقطه وسط پاره خط AB برابر است با

$$M = \frac{A+B}{2} = (1, -2)$$

روش دوم: خط عمود بر خط $x + y + 1 = 0$ که از مرکز دایره بگذرد را با خط قطع می‌دهیم. نقطه تقاطع وسط A و B است.خطی که از مرکز دایره $(r, -1)$ بر این خط $(x + y = -1)$ عمود شود قطعاً از وسط وتر می‌گذرد. پس:

$$x - y = k = 3 \quad \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow O(1, -2), R = \sqrt{5}$$

$$C': x^2 + y^2 + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$O'(0, -1), R' = 1$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OO' \approx 1/4$$

$$R + R' = \sqrt{5} + 1 \approx 2/2 + 1 \approx 3/2$$

$$|R - R'| = |\sqrt{5} - 1| \approx |2/2 - 1| \approx 1/2$$

$$\Rightarrow |R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow \text{مقاطع}$$

چون ضرایب x^2 و y^2 مثبت‌اند، پس: اگر نقطه A درون دایره P باشد باید شرط $P(A) < 0$ برقرار باشد:

$$m^2 + (2m+1)^2 - 2m + 2m + 1 - 8/5 < 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 6/5 < 0$$

$$\begin{cases} \Delta = 16 + 4(5)(6/5) = 16 + 24 = 40 \\ m = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{10} = -\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \end{cases}$$

بنابراین $-\frac{2}{5} < m < \frac{2}{5}$ قرار می‌گیرد در این صورت شامل دو عدد صحیح می‌باشد.

$$A \text{ دایره } : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 9 = 0 \rightarrow O_A = (-1, 2), R_A = \sqrt{14}$$

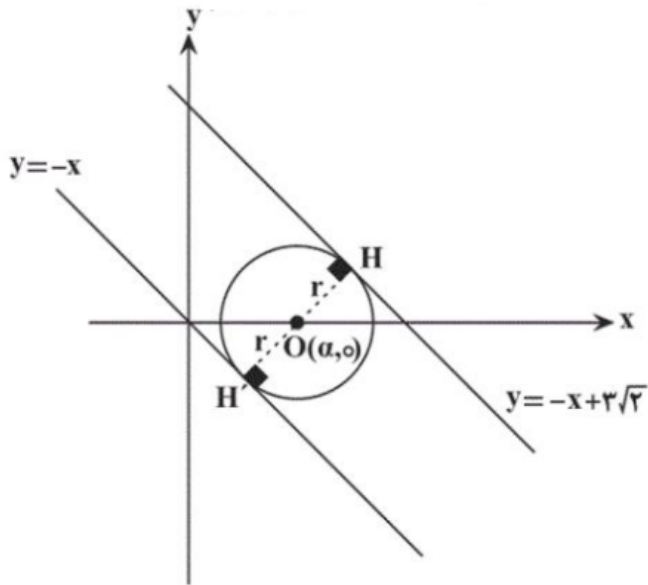
$$B \text{ دایره } : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \rightarrow O_B = (1, -2), R_B = 3$$

$$O_A O_B = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$|R_A - R_B| < 2\sqrt{5} < R_A + R_B \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2} - x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3\sqrt{2} = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دو خط} = 2r = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$



مرکز دایره $O(\alpha, 0)$ می‌باشد. پس:

$$|OH| = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|1 \times \alpha + 1 \times 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

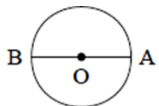
معادله دایره‌ای با شعاع $\frac{3}{2}$ و مرکز $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ به صورت زیر است:

$$(x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

الف) $(-1, 1)$ یا $(-1, -1)$

ب) ۲

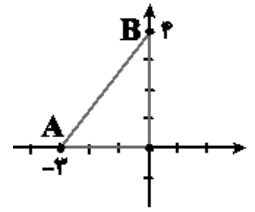
وسط AB مرکز دایره است.



$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O = (\frac{\lambda + 0}{2}, \frac{-\lambda + 6}{2}) = (\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda - 6}{2})$$

$$R = OA = \sqrt{(\frac{\lambda}{2} - 0)^2 + (-\frac{\lambda - 6}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{(\lambda - 6)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda^2 - 12\lambda + 36}{4}} = \sqrt{\frac{2\lambda^2 - 12\lambda + 36}{4}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 6\lambda + 18}{2}}$$

شکل را ببینید:



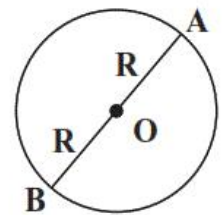
این مثلث قائم‌الزاویه است پس قطر دایره‌ای که از سه رأس می‌گذرد برابر وتر خواهد بود:

$$2R = AB = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2.5$$

راه حل دوم: نقاط $(0, 4)$ و $(-2, 0)$ و مبدأ را در معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ کنترل کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0) \Rightarrow c = 0 \\ (0, 4) \Rightarrow 16 + 4b = 0 \Rightarrow b = -4 \\ (-2, 0) \Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right\}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$



$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow O(-2, 2)$$

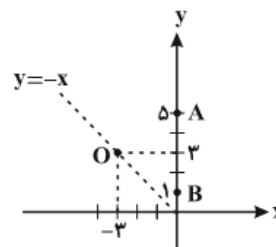
$$R = OA = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$$

مرکز دایره بر روی عمود منصف وتر AB یعنی $y = 3$ برقرار دارد.

مرکز دایره روی خط $y = -x$ هم هست. پس $O(-3, 3)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر است با: $OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ و قطر آن $d = 2R = 2\sqrt{13}$ است.



چون دو دایره مماس خارجاند پس بین خطالمکزیین دو دایره (d) و شعاعهای آنها رابطه $d = r + r'$ برقرار است.

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

$$O' \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2} \right) \Rightarrow O' (2, -1)$$

$$r' = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 - 4(-4)} = 3$$

$$\Rightarrow d = |OO'| = \sqrt{(-2-2)^2 + (2+1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow 5 = 3 + r$$

$$\Rightarrow 2 = r \Rightarrow \text{قطر دایره } 2r = 4$$

$$R = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\text{AB وسط } M \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} m-1 \\ m \end{vmatrix} \Rightarrow OM = \sqrt{(m-1)^2 + m^2} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow 2m^2 - 2m + 1 = 5 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

معادله دایره‌ای به مرکز $\omega(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است. پس:

$$\omega_1(-1, 2), R_1 = 2 \Rightarrow C_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\omega_2(2, 1), R_2 = 2 \Rightarrow C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 2y = 0 \xrightarrow{\div 2} y = 3x$$

(معادله وتر مشترک دو دایره C_1 و C_2)

$$2c = |FF'| = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow c = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow (\sqrt{3})^2 = b^2 + (1)^2 \rightarrow b^2 = 2 \rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \text{قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{3}$$